## 3.2 العلاقات والدوال (Relations and Functions)

**تعريف 1.2 (الضرب الديكارتي)**

لنفرض أن $A$ و$B$ مجموعتان. المجموعة التي تتكون من الأزواج المرتبة $(x,y)$، حيث $x \in A$ و$y \in A$ تسمى الضرب الديكارتي للمجموعتين $A$ و$B$، ويكتب $A \times B$.

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

**مثـال 15**

إذا كانت $A = \{a,b,c\}$ و$B = \{1,2\}$، أوجد $A \times B$ و$B \times A$.

**الحـل**

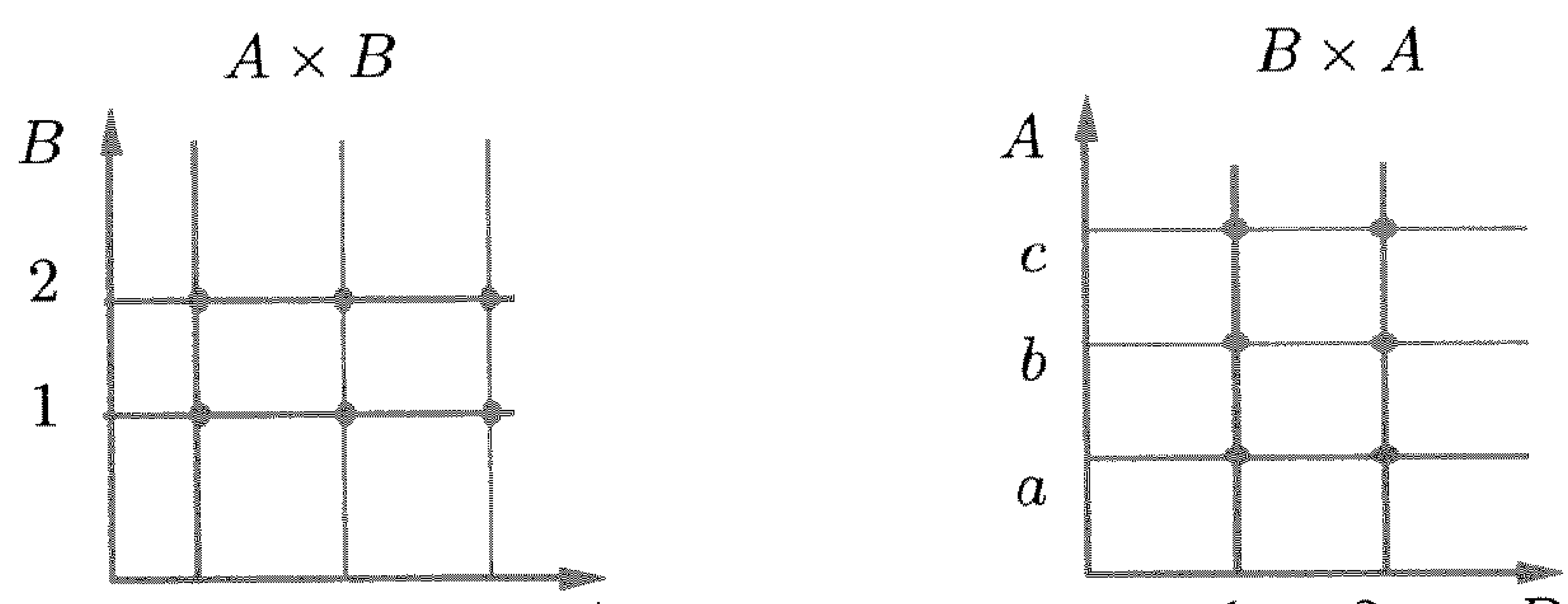
نمثّل إحدى المجموعتين بالمحور الأفقي والأخرى بالمحور الرأسي.

نقط التقاطع هي عناصر المجموعة $A \times B$، وكذلك المجموعة $B \times A$.

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),)c,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

من المثال، نلاحظ $A \times B \neq B \times A$.




شكل 2.2

## العلاقات (Relations)

**تعريف 2.2**

لنفرض أن $A$ و$B$ مجموعتان.

العلاقة $\mathcal{R}$ من $A$ إلى $B$ هي مجموعة جزئية من $A \times B$.

من المعتاد أن نكتب $a\mathcal{R}b$ أو $(a,b) \in \mathcal{R}$، وتقرأ $a$ مرتبطة بالعلاقة $\mathcal{R}$ مع $b$. عندما تكون $A = B$، فإننا نقول $\mathcal{R}$ علاقة على $A$ بدلاً من $\mathcal{R}$ علاقة من $A$ إلى $B$.

لنفرض أن $\mathcal{R}$ علاقة من $A$ إلى $B$.

**نطاق العلاقة** $\mathcal{R}$: هو مجموعة كل العناصر $a \in A$ حيث $a\mathcal{R}b$ لبعض $b \in B$ ونكتب $\mathbf{Dom}(\mathcal{R})$.

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A : (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

**مدى العلاقة** $\mathcal{R}$: هو مجموعة كل العناصر $b \in B$ حيث $a\mathcal{R}b$ لبعض $a \in A$. ونكتب $\mathbf{Ran}(\mathcal{R})$.

$$\mathbf{Ran}(\mathcal{R}) = \{b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

**مثال 16**

إذا كانت $A = \{2,3,5,6\}$ وكانت $\mathcal{R}$ تعني قاسماً، أوجد:

1) $A \times A$

2) العلاقة $\mathcal{R}$ على $A$.

## الحـــل

$A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,5),(3,6),(5,2),(5,3),$
$(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,5),(6,6)\}$
$\mathcal{R} = \{(2,2),(2,6),(3,3),(3,6),(5,5),(6,6)\}$

### تعريف 3.2

إذا كانت $A$ و$B$ مجموعتين و$\mathcal{R}$ علاقة من $A$ إلى $B$، فإن معكوس العلاقة $\mathcal{R}$ هو علاقة $\mathcal{R}^{-1}$ من $B$ إلى $A$؛ حيث أن $b\mathcal{R}^{-1}a$ عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}b$.

في المثال السابق

$\mathcal{R}^{-1} = \{(2,2),(6,2),(3,3),(6,3),(5,5),(6,6)\}$

### تعريف 4.2

لنفرض أن $\mathcal{R}$ علاقة على $A$، نقول إن العلاقة $\mathcal{R}$ علاقة:

1) متعاكسة عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}a$ لكل عنصر $a \in A$.
2) متماثلة عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}b$ يؤدي إلى أن $b\mathcal{R}a$.
3) ناقلة عندما وفقط عندما $a\mathcal{R}b$ و$b\mathcal{R}c$ يؤدي إلى أن $a\mathcal{R}c$.
4) متكافئة عندما وفقط عندما تكون $\mathcal{R}$ علاقة متعاكسة ومتماثلة وناقلة.

## مثـــال 17

لنفرض أن $A = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن:

1) $<$ علاقة ناقلة ولكنها ليست متعاكسة أو متماثلة.
2) $\leq$ علاقة ناقلة ومتعاكسة ولكنها ليست متماثلة.
3) $=$ علاقة متكافئة.

## الدوال (Functions)

**تعريف 5.2**

لنفرض أن $X$ و$Y$ مجموعتان.

الدالة f هي علاقة من $X$ إلى $Y$، تحقق ما يلي:

1) $\mathbf{Dom}(f) = X$

2) إذا كان $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$، فإن $y = z$.

**إذا كانت $f$ دالة من $X$ إلى $Y$، فإننا نكتب:**

$$f : X \to Y$$

**ونكتب $y = f(x)$ بدلاً من $(x, y) \in f$.**

**تعريف 6.2** (تعريف آخر للدالة)

الدالة هي علاقة من $X$ إلى $Y$، تحدد لكل عنصر $x \in X$ عنصراً وحيداً $y \in Y$.

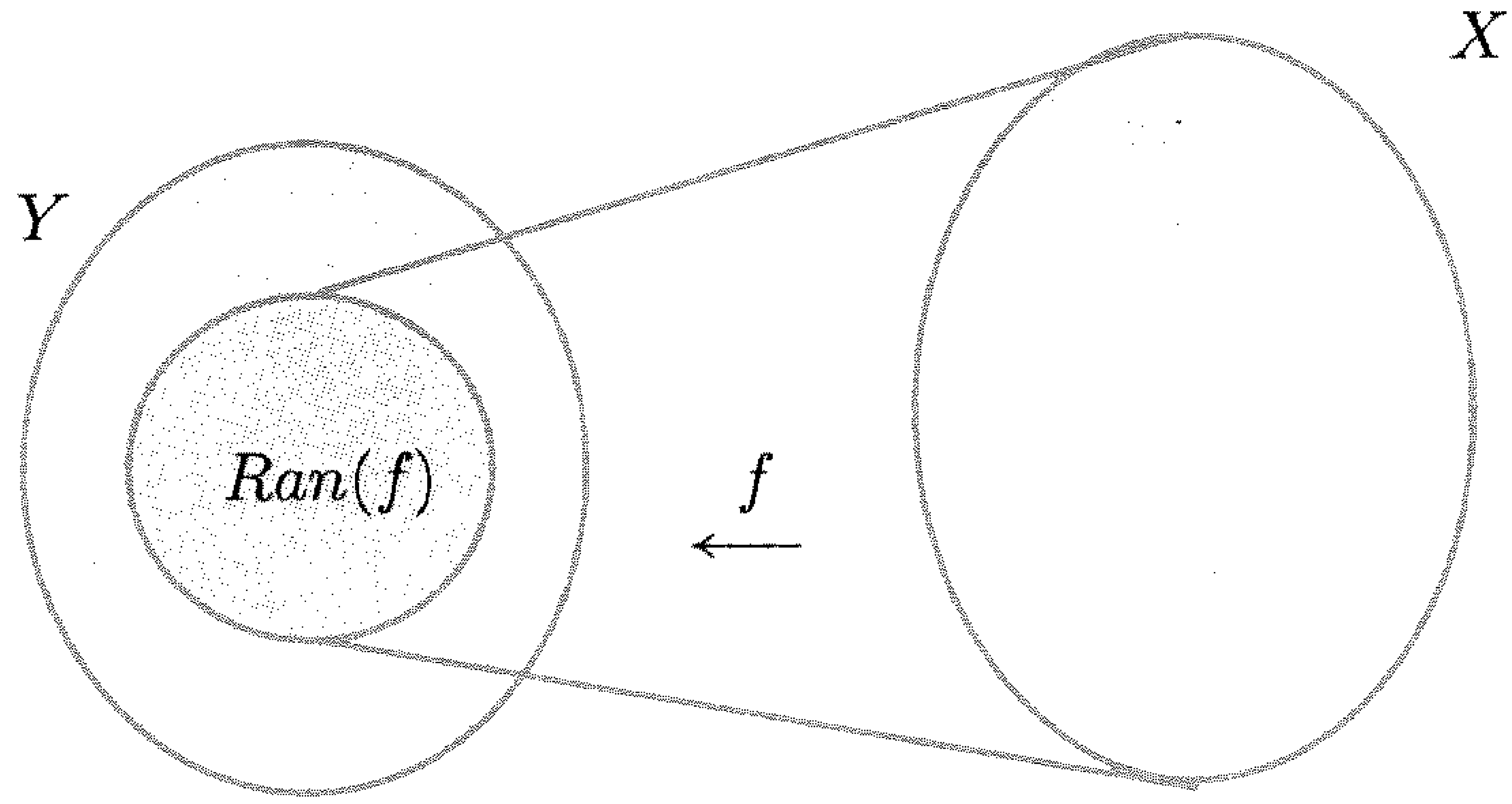
**إذا كان $y = f(x)$، فإن $y$ يسمى صورة (image) x تحت تأثير $f$.**

**إذا كانت $f : X \to Y$ دالة، فإننا نلاحظ أن مجموعة كل الصور (صور النطاق) هي مدى الدالة $f$.**

$$\mathbf{Ran}(f) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$$

**نلاحظ أن $\mathbf{Ran}(f) \subseteq Y$.**

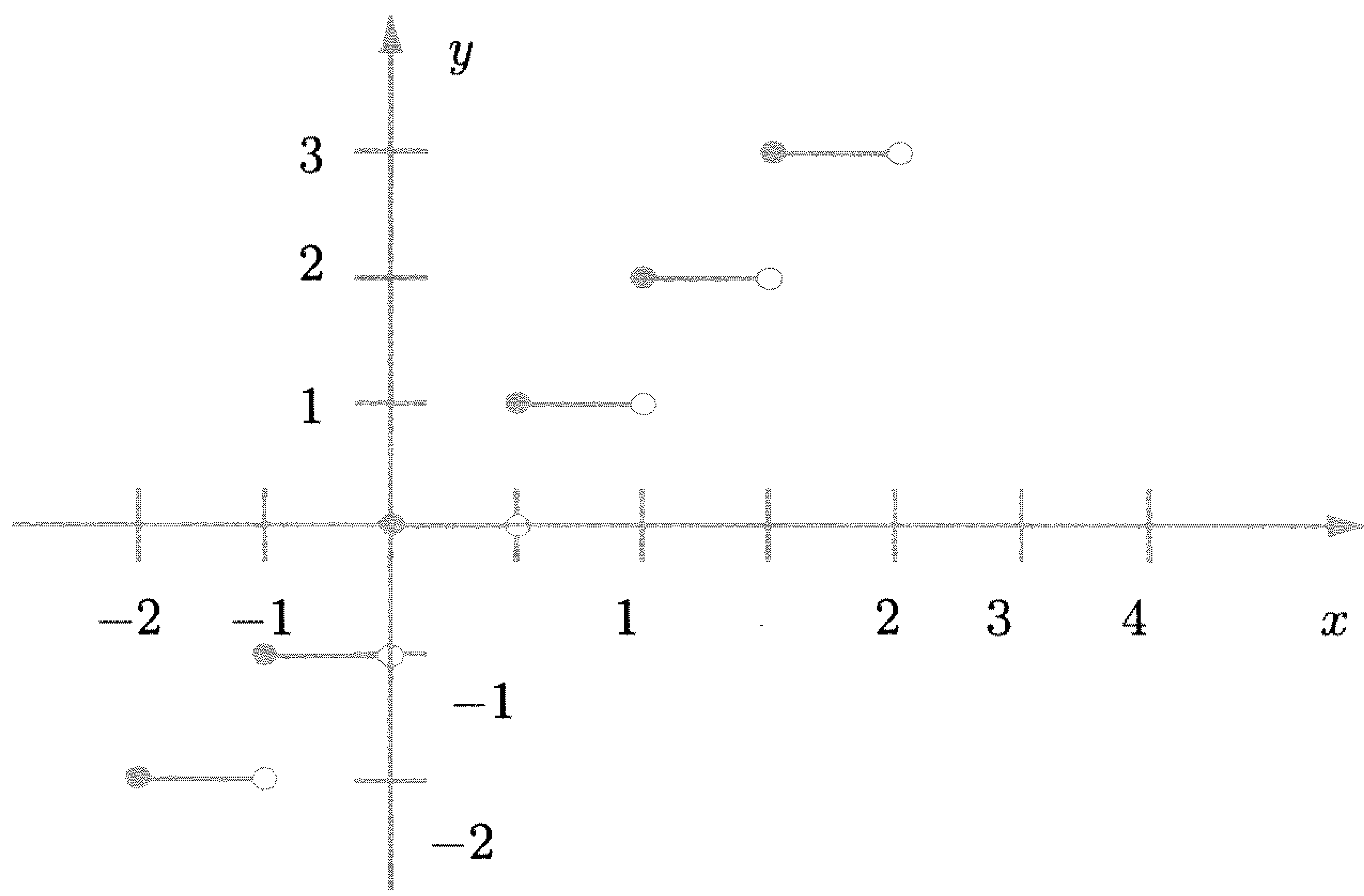
تسمى المجموعة $Y$ النطاق المصاحب (Codomain) للدالة $f$، وليس من الضروري أن يساوي مدى الدالة نطاقها المصاحب.




الشكل 3.2

مثـــال 18

الدالة $f : \mathbb{R} \to R$ والمعرفة $f(x) = [x]$ حيث $[x]$ يعني أكبر عدد صحيح أصغر من $x$ أو يساوي $x$.

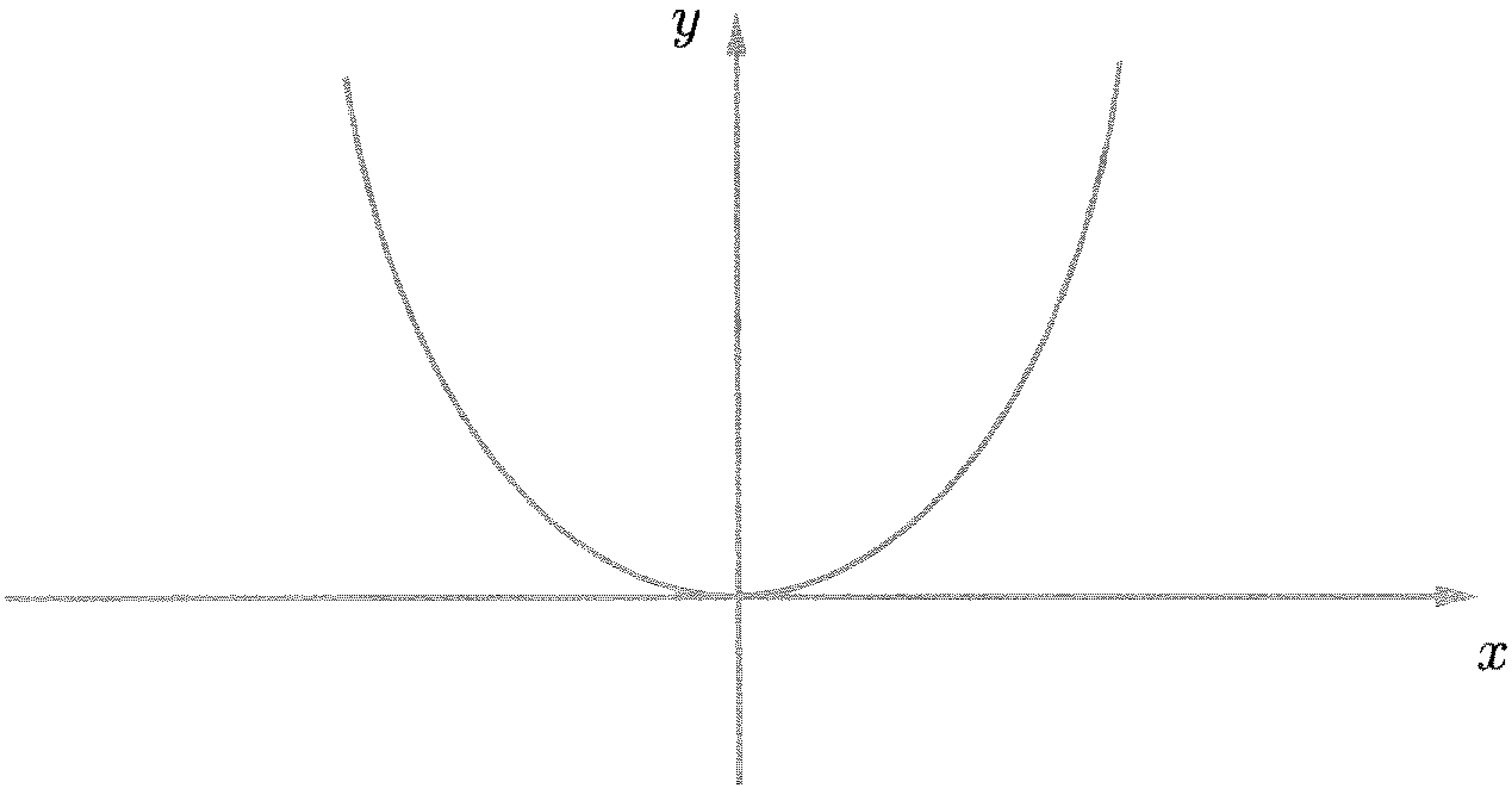



الشكل 4.2 الدالة $f(x) = [x]$

### مثـال 19

الدالة $f : I\!R \to R$ والمعرفة $f(x) = x^2$.

$\mathbf{Dom}(f)$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، ولكن $\mathbf{Ran}(f)$ هو الفترة $[0, \infty]$.

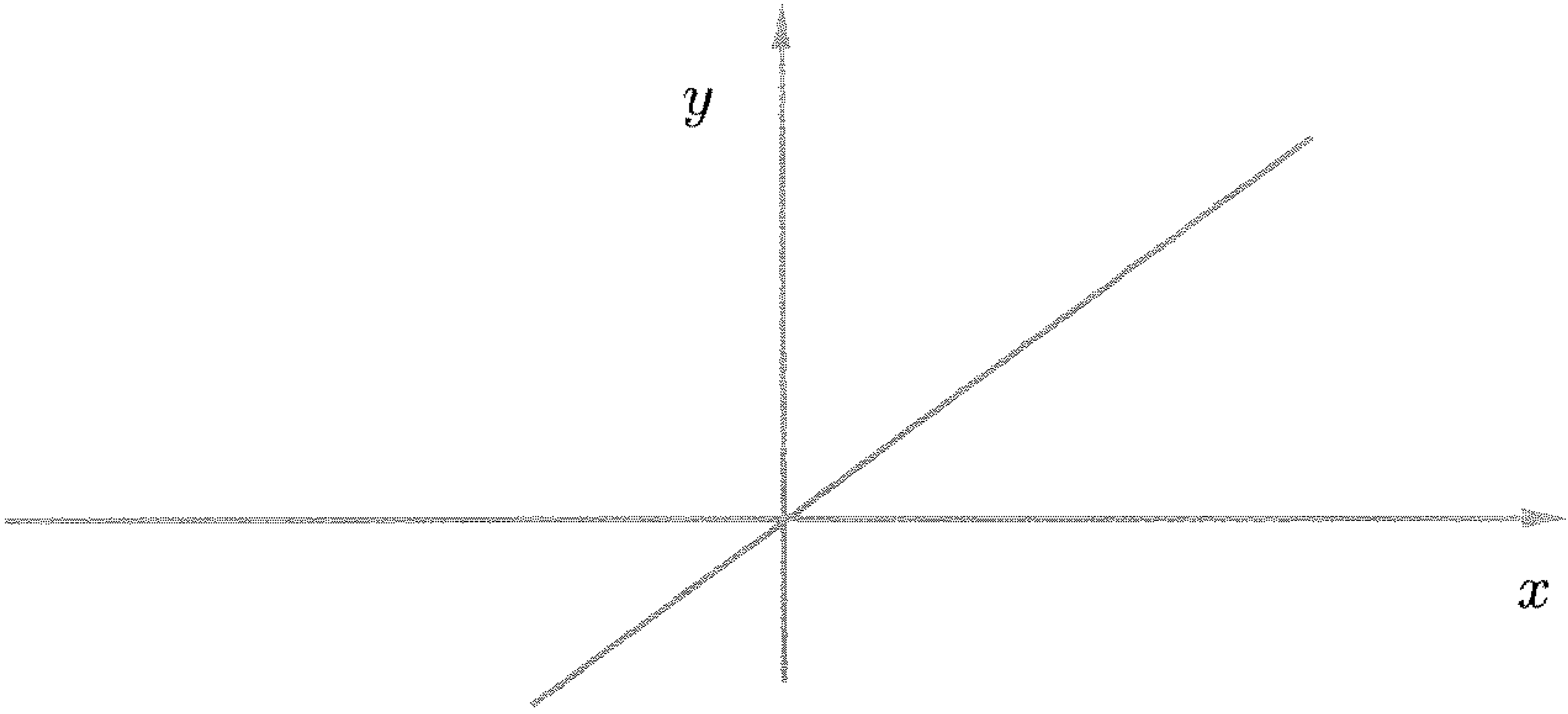



الشكل 5.2 الدالة $f(x) = x^2$

### مثـال 20

الدالة $f : I\!R \to R$ والمعرفة $f(x) = x$.

النطاق $\mathbf{Dom}(f)$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، ومداها أيضاً مجموعة الأعداد الحقيقية. وفي هذه الحالة، فإن مدى $f$ يساوي نطاقها المصاحب.




الشكل 2.6 الدالة $f(x) = x$

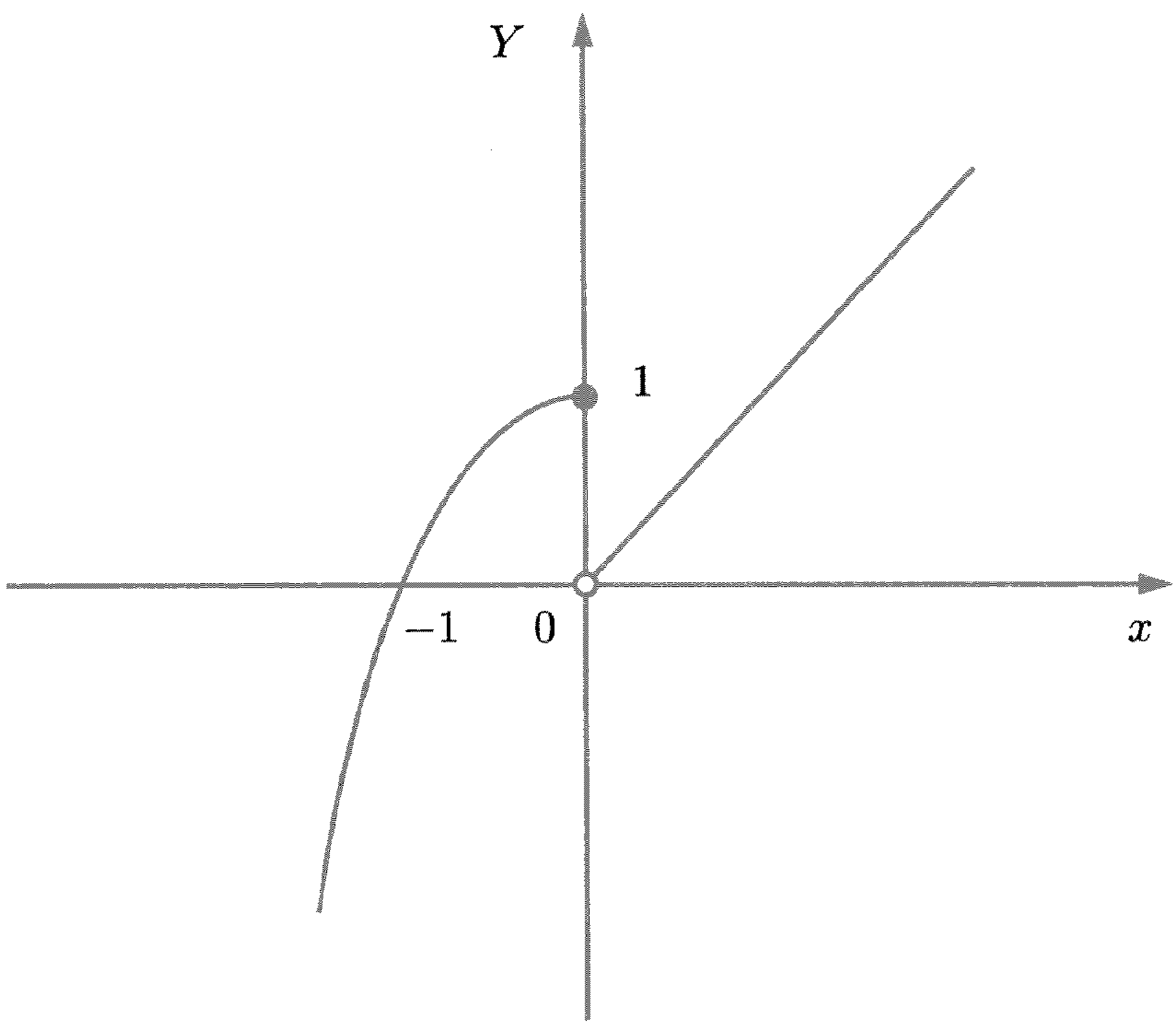
## مثـــال 21

الدالة $f : I\!R \to R$ والمعرفة

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad x \le 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$$ (أنظر الشكل 7.2)

نطاق ومدى هذه الدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية.

نلاحظ أيضاً أن المدى يساوي النطاق المصاحب لهذه الدالة.




الشكل 7.2

ملاحظة: عند بيان (رسم) أي معادلة، فإن هذا البيان يمثل دالة عندما وفقط عندما لا يمر أي خط عمودي بأكثر من نقطة واحدة.

## تمارين 3.2

1) إذا كانت $A=\{a,b,c\}$، وكانت $\mathcal{R}$ علاقة على $A$ بحيث تكون:

$$\mathcal{R}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(c,a),(a,c)\}$$

أ) أوجد مدى ونطاق العلاقة $\mathcal{R}$.

ب) أوضح أن $\mathcal{R}$ علاقة متعاكسة ومتماثلة، ولكنها ليست علاقة ناقلة.

2) إذا كانت $A=\{a,b\}$ و $B=\{x,y,z\}$، وكانت العلاقة:

$$\mathcal{R}=\{(a,x),(b,y)\}$$

أوجد معكوس العلاقة $\mathcal{R}$.

3) إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$، أوجد:

أ) $f(x+\Delta x)$ ب) $f(x)+f(\Delta x)$

ج) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ حيث أن $\Delta x\neq 0$

4) إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{x}$، أوجد:

أ) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ب) $\dfrac{1}{f(x)}$ ج) $\left[f(x)\right]^2$

5) لنفرض أن $f:\mathbb{R}\to R$ معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x\in Q \\ -1 & , \quad x\in Q^c \end{cases}$

أوجد:

أ) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ب) $f(7)$ ج) $f(\sqrt{2})$

6) إذا كانت $f:\mathbb{R}\to R$ معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}4x+3 & , \quad x>5\\ x^2-2 & , \quad 6\le x\le 5\\ 4-5x & , \quad x<-6\end{cases}$$

أوجد:

أ) $f(-7)$ ب) $f(3)$ ج) $f(0)$

د) $f(5)$ هـ) $f(6)$

7) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+7}$، أوجد:

أ) $f(-1)$ ب) $f(0)$

ج) $f(2)$ د) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

في التمارين من 8 إلى 17 أوجد نطاق الدالة المعطاة:

8) $f(x)=5-x$ 9) $f(x)=(x+2)^{-1}$

10) $f(x)=\dfrac{4-5x}{2}$ 11) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

12) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-4}$ 13) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

14) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 15) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$ 17) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$

في التمارين من 18 إلى 22 أوجد نطاق الدالة المعطاة:

18) $f(x)=x-1$ 19) $f(x)=2x-3$

20) $f(x)=x^2+1$ 21) $f(x)=x^3-4$

22) $f(x)=\begin{cases}5-x & , \quad x<3\\ q-\dfrac{x}{3} & , \quad x>0\end{cases}$

23) أرسم بيانيًا الدالة $f(x)=|x^3+5|$

24) أرسم بيانيًّا الدالة $f(x) = x + |x|$

25) إذا كانت

$$g(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

ارسم بيانيًّا الدالتين $f$ و$g$

## 4.2 عمليات جبرية على الدوال

إذا كانت $f$ و$g$ دالتين، فإن:

(1) $(kf)x = kf(x)$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f)$ وحيث أن $k$ مقدار ثابتة.

(1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g)$

(3) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ لكل $x \in \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g)$ بشرط أن: $g(x) \neq 0$.

### مثال 22

إذا كانت $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = 3x + 1$، أوجد:
$f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$.

### الحل

$\mathbf{Dom}(f) = \{(x : -2 \leq x \leq 2\}$ و $\mathbf{Dom}(g) = I\!R$

ومن ذلك، فإن: $\mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g) = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$

إذن:

1) $(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + 3x + 1$ لكل $x$ في النطاق المشترك.

2) $(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - 3x - 1$ لكل $x$ في النطاق المشترك.

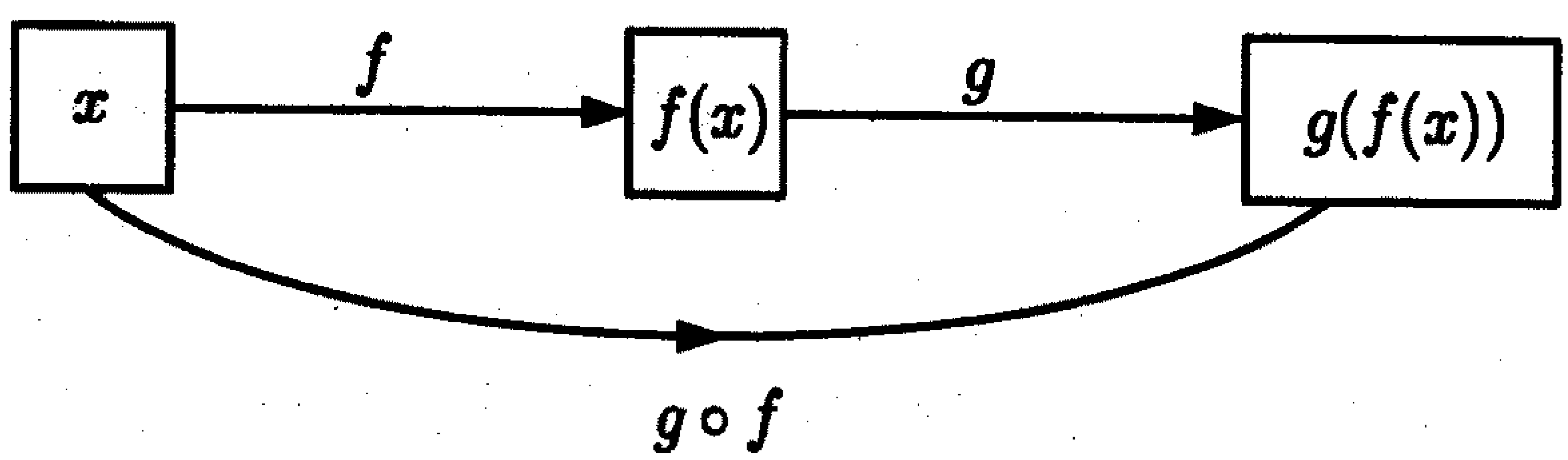
3) $(f.g)(x) = (\sqrt{4 - x^2}).(3x + 1)$ لكل $x$ في النطاق المشترك.

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{3x-1}$ لكل $x$ في النطاق المشترك و $x \neq -\frac{1}{3}$.

## تعريف 7.2

إذا كانت $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$، فإن الدالة التركيبية (Composite Function)، هي:

$g\circ f:X\to Z$ و $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ لكل $x\in X$




شكل 8.2

## مثـال 23

أوجد $g\circ f$ و $f\circ g$، إذا كانت $f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$.

## الحـل

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$$

## تمارين 4.2

1) إذا كانت $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x+1$، أوجد:

أ) $f+g$ ب) $f-g$ ج) $f.g$ د) $\frac{f}{g}$

2) إذا كانت $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$، أوجد:

أ) $f+g$ ب) $f-g$ ج) $f.g$ د) $\frac{f}{g}$

3) إذا كانت $f(x)=x-1$ و $g(x)=2x+1$، أوجد:

أ) $f\circ g$ ب) $g\circ f$

4) إذا كانت $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$، أوجد:

أ) $f\circ g$ ب) $g\circ f$

5) أوضح بيان الدالة $f(x)=-3|x|+x$، وأوجد نطاقها ومداها.

6) أوضح بيان الدالة $f(x)=[x]-x$.

7) أوضح بيان الدالة $f(x)=[x]+x$

8) أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-2}$.

9) أوجد مدى الدالة $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

10) أوضح بيان الدالة $f(x)=x^2-x$، وأوجد نطاقها.

11) إذا كانت $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و $g(x)=x^2$، فأوجد $f\circ g$ و $g\circ f$.

12) إذا كانت

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , \quad x\le 0\\ \sqrt{-x} & , \quad x<0\end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x\ge 0\\ x^3 & , \quad x<0\end{cases}$$

أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$.

13) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$، أوجد:

أ) $f+g$، $f-g$، $f.g$، $\dfrac{f}{g}$

ب) النطاق لكل حالة في (أ).

14) أرسم بيانياً الدالة $f(x)=-x^2-5x+5$.

15) أوجد نطاق ومدى الدالة $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{1+x}}$.

## 5.2 بعض أنواع الدوال

### تعريف 8.2

الدالة $f : X \to Y$ تسمى دالة:

1) أحادية (One-To-One):

إذا وإذا كان فقط $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ يؤدي إلى أن $x_1 = x_2$.

2) فوقية (Onto):

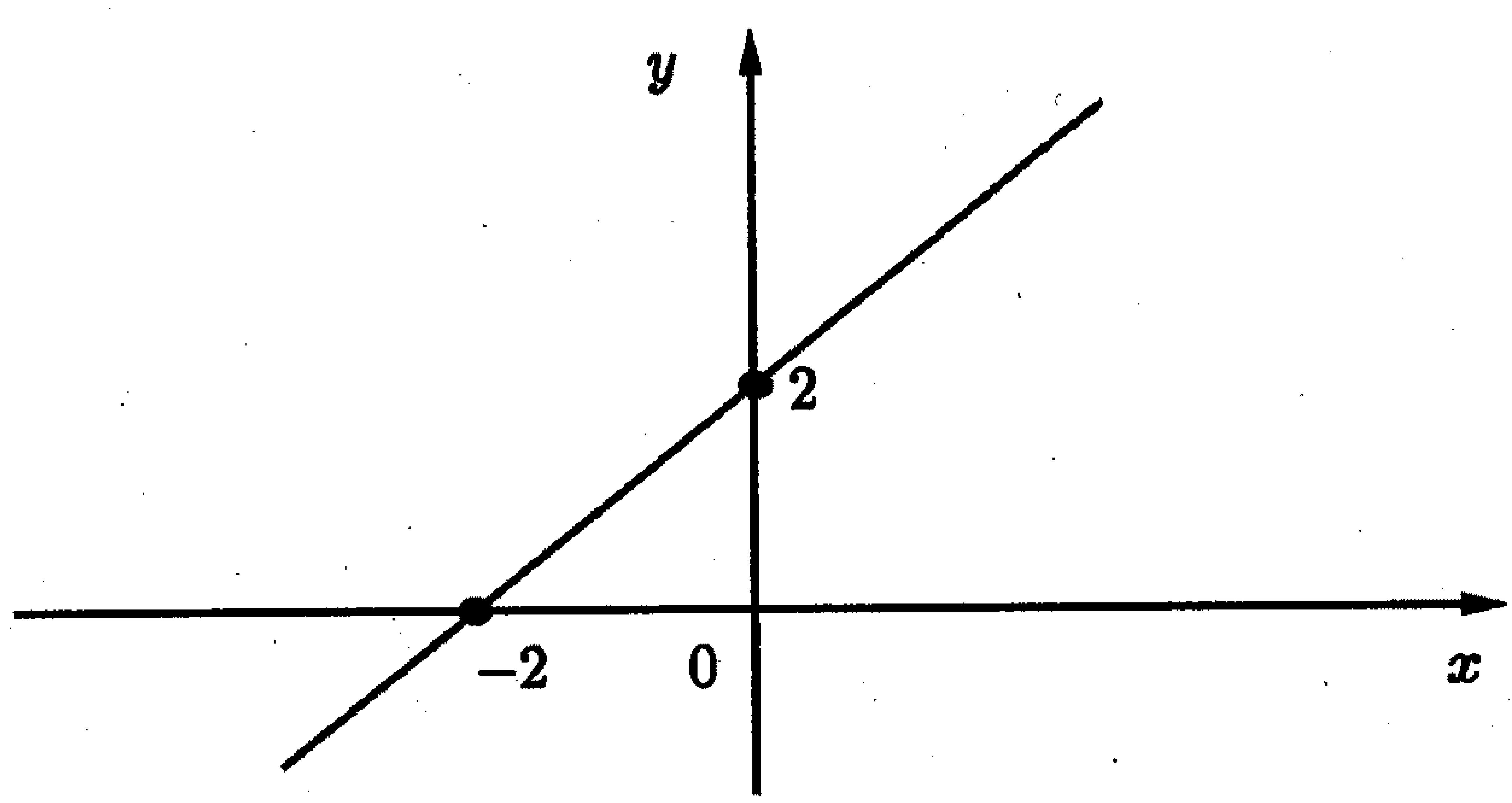
إذا وإذا كان فقط لكل $y \in Y$ يوجد $x \in X$ حيث أن $f(x) = y$.

### مثـــال 24

الدالة $f(x) = x + 2$ دالة أحادية من $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$، لأنه إذا كان:

$x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$، و $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $x_1 + 2 = x_2 + 2$، ومنها $x_1 = x_2$.

وفوقية لأنه لأي $y \in \boldsymbol{R}$ يوجد $x \in \boldsymbol{R}$ ونستطيع الحصول عليه من $f(x) = y$ أي أن $x + 2 = y$، ومن ذلك فإن $x = y - 2$ حيث $f(x) = y$.

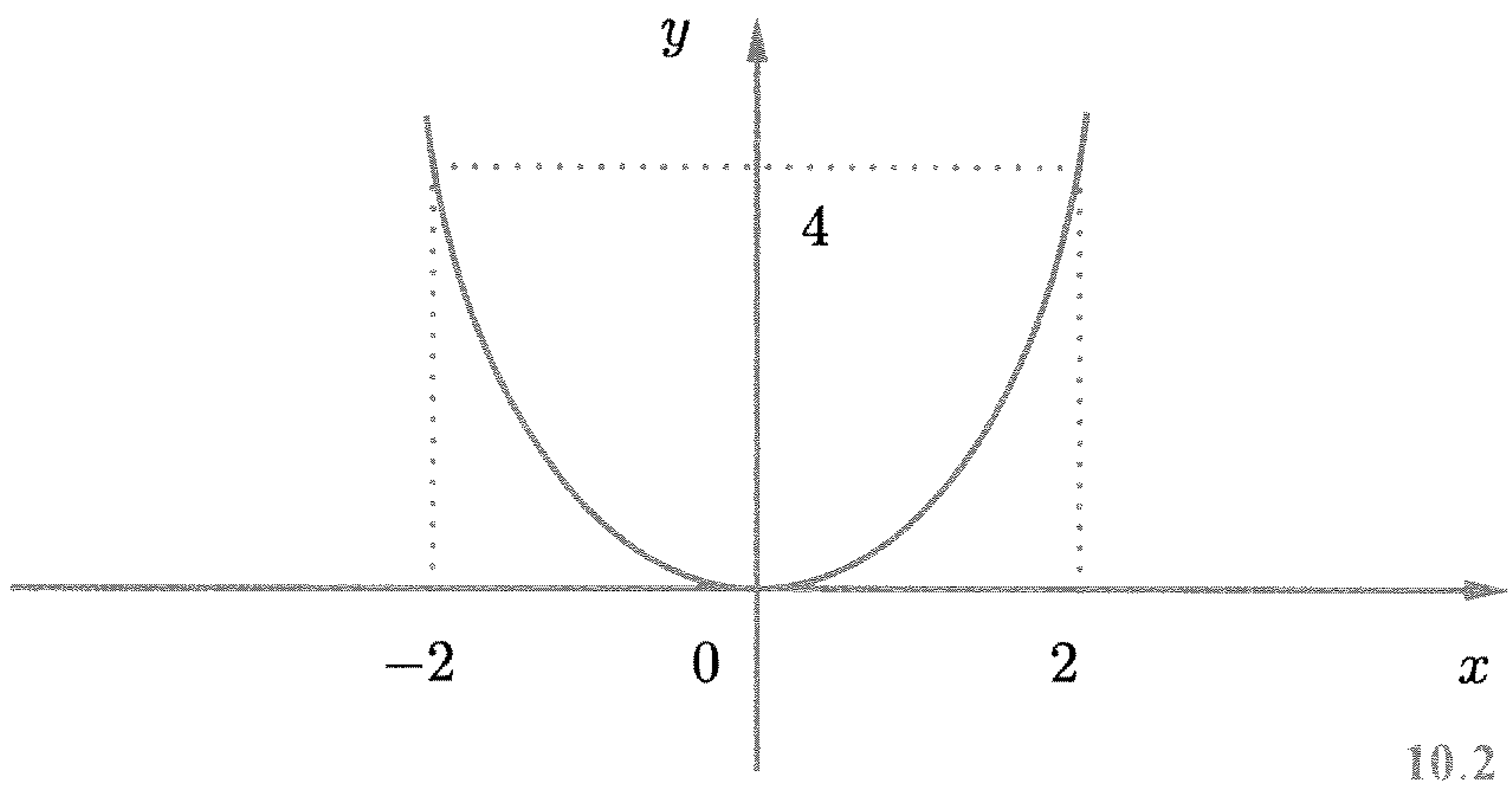



الشكل 9.2 الدالة $f(x) = x + 2$

**مثــال 25**

الدالة $f(x) = x^2$ ليست دالة أحادية؛

لأن $2, -2 \in \mathbb{R}$ و $f(-2) = f(2)$، ولكن $2 \neq -2$.




الشكل 10.2

ملاحظة: عند بيان أي دالة، فإن هذا البيان يمثل دالة أحادية عندما وفقط عندما لا يمر أي خط أفقي بأكثر من نقطة واحدة.

الدالة $f(x) = x$ تسمى الدالة المحايدة (Identity Function)، ويرمز لها بالرمز $I$

**تمارين 5.2**

في التمارين من 1 إلى 5، حدِّد ما إذا كانت الدالة المعطاة دالة أحادية أم لا:

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = 2x^2 - x - 3$

3) $f(x) = 2x + 9$

4) $f(x) = |x + 1|$

5) $f(x) = x^4 + 2x + 1$

في التمارين من 6 إلى 10، حدِّد ما إذا كانت الدالة فوقية أم لا:

6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x)=x^2$ .

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x)=x^3+1$ .

8) $f:\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}\to\mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x)=\sqrt{x}$ .

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ .

10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرّفة $f(x)=x^5$ .

## 6.2 الدالة العكسية (Inverse Function)

**تعريف 9.2**

إذا كانت $f: X \to Y$ دالة أحادية، تسمى الدالة $g: Y \to X$ الدالة العكسية للدالة $f$، بشرط أن $f \circ g = I_y$ و $g \circ f = I_x$، وفي هذه الحالة نكتب: $g = f^{-1}$.

لاحظ أنه إذا كانت $f$ ليست أحادية، فإن $f^{-1}$ لا تمثل دالة.

كيفية إيجاد الدالة العكسية

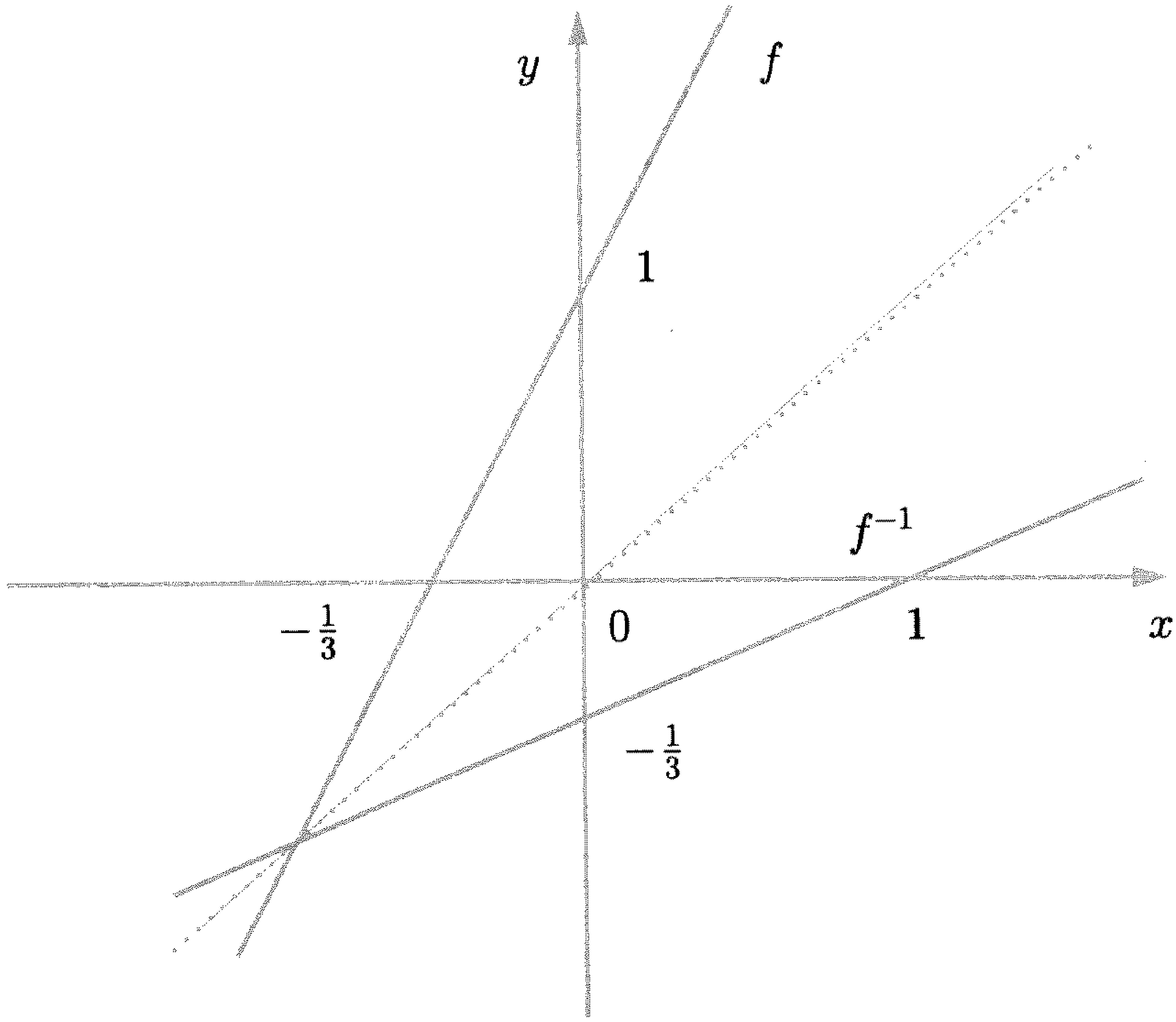
**مثال 26**

أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = 3x + 1$

**الحل**

1) ضع $y$ بدلاً من $f(x)$، أي أن $y = 3x + 1$.
2) أوجد $x$ بدلالة $y$، أي أن $x = \dfrac{y-1}{3}$.
3) ضع $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$.
4) ضع $y = x$، أي أن $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

للتأكد من عملك، أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$، كلاهما يجب أن يساوي الدالة المحايدة $I$.




الشكل 11.2

## مثـــال 27

أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{2x-3}$ .

## الحـــل

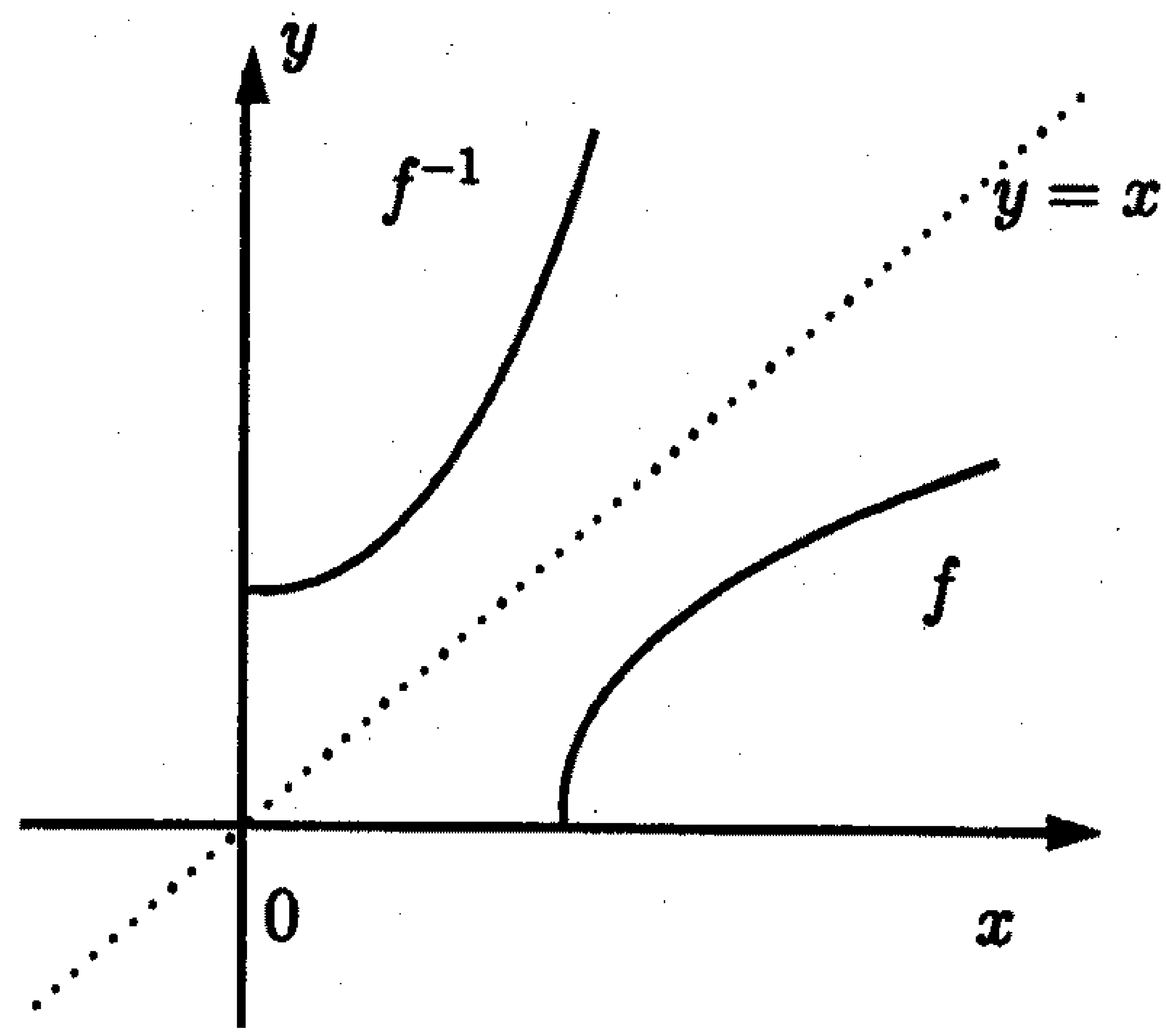
التعويض عن $f(x)$ بالمتغير $y$ يعطينا $y = \sqrt{2x-3}$

التغيير يعطينا $x = \sqrt{2y-3}$

وبالتربيع، نجد أن $x^2 = 2y-3$

التحليل بدلالة $x$ يوصلنا إلى $y = \frac{x^2+3}{2}$

الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{2x-3}$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$




الشكل 12.2

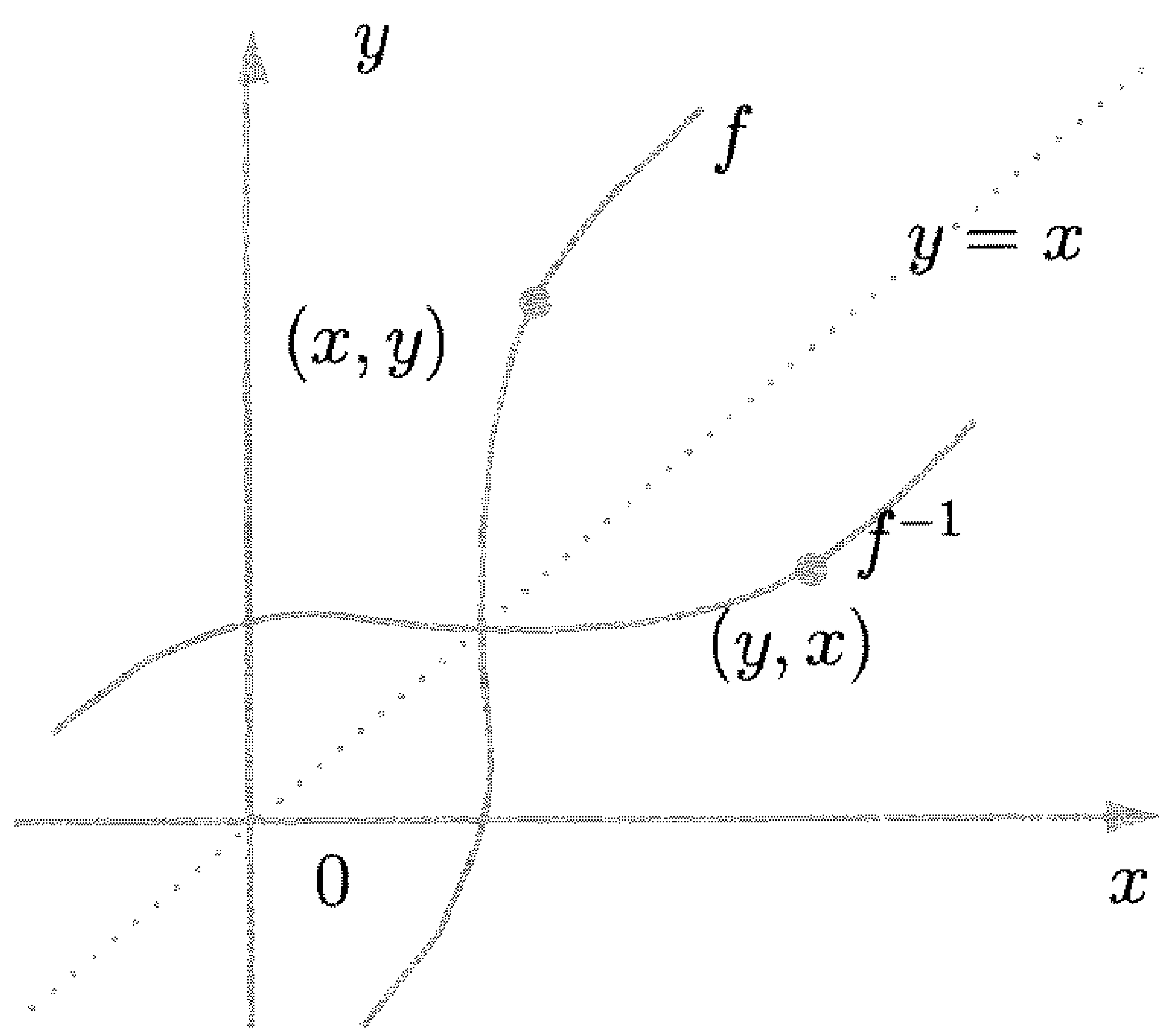
الشكل 13.2 بيان الدالة $f^{-1}$، هو صورة بيان الدالة $f$، في المستقيم $y = x$.

من المثالين السابقين، نستطيع استنتاج أن:

بيان (رسم) الدالة العكسية للدالة $f$، هو صورة بيان الدالة $f$ في المستقيم (المرآة)

$x = y$

بعبارة أخرى: يحتوي بيان الدالة $f$ على كل النقاط $(x,y)$، إذا وإذا كان فقط بيان الدالة $f^{-1}$ يحتوي على جميع النقاط $(y,x)$.




شكل 13.2

## تمارين 6.2

في التمارين من 1 إلى 5، أوضح أن كلتا الدالتين $f$ و$g$ معكوس الأخرى:

1) $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

2) $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = x^3 - 8$ و $g(x) = \sqrt[3]{x+8}$.

5) $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 1$ لكل $x \geq 1$.

في التمارين من 6 إلى 10، أوجد معكوس الدالة المعطاة في كل حالة:

6) $f(x) = (x+3)^5 - 2$

7) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

8) $f(x) = -\dfrac{1}{x} - 1$

9) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x+1}$

10) $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$